Calcul littéral

Développement • Factorisation • Identités remarquables • Facteur commun

Sommaire

1. Rappels fondamentaux

1.1 Vocabulaire

Une **expression littérale** contient des lettres (variables) et des nombres.

$$\boxed{3x^2 - 5x + 2}$$

— $3x^2$: terme du 2nd degré
— $-5x$: terme du 1er degré
— $+2$: terme constant

1.2 Réduire une expression

Règle d'or : On ne peut additionner que des termes de même nature.

✓ $3x + 5x = 8x$
✓ $4x^2 + 7x^2 = 11x^2$
$3x + 4x^2$ ne se réduit pas

Méthode en 3 étapes :

1. Identifier les termes de même puissance
2. Regrouper les termes semblables
3. Additionner/soustraire les coefficients

Exemple détaillé :
$5x - 3 + 2x + 7 - 4x^2 + x^2$

→ Regroupement des x^2 : $-4x^2 + x^2 = -3x^2$
→ Regroupement des x : $5x + 2x = 7x$
→ Constantes : $-3 + 7 = 4$
Résultat : $-3x^2 + 7x + 4$

1.3 Suppression de parenthèses

— **Règle 1 (+ devant) :** $(3x + 5) + (2x - 4) = 3x + 5 + 2x - 4 = 5x + 1$
— **Règle 2 (- devant) :** $(3x + 5) - (2x - 4) = 3x + 5 - 2x + 4 = x + 9$

Exemple complet : $4x - (3x - 2) + (5 - 2x) - (x + 1)$
Étape 1 : on supprime les parenthèses
$= 4x - 3x + 2 + 5 - 2x - x - 1$
Étape 2 : on regroupe
$= (4x - 3x - 2x - x) + (2 + 5 - 1)$
$= -2x + 6$

2. Distributivité simple

$$k(a + b) = ka + kb$$
$$k(a - b) = ka - kb$$

Exemple 1 : $3(x + 4)$
→ $3 \times x = 3x$
→ $3 \times 4 = 12$
Résultat : $3x + 12$

Exemple 2 : $-2(3x - 5)$
→ $-2 \times 3x = -6x$
→ $-2 \times (-5) = +10$
Résultat : $-6x + 10$

Exemple 3 : $x(2x + 3)$
→ $x \times 2x = 2x^2$
→ $x \times 3 = 3x$
Résultat : $2x^2 + 3x$

Exemple 4 : $4(2x + 3) - 2(x - 1)$
→ $4(2x + 3) = 8x + 12$
→ $-2(x - 1) = -2x + 2$
→ $(8x + 12) + (-2x + 2) = 6x + 14$

Astuce : Quand il y a un signe négatif devant la parenthèse, on distribue le signe moins sur tous les termes.

3. Double distributivité

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple 1 : $(x+3)(x+5)$
Étape 1 : $x \times x = x^2$
Étape 2 : $x \times 5 = 5x$
Étape 3 : $3 \times x = 3x$
Étape 4 : $3 \times 5 = 15$
Résultat : $x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$

Exemple 2 : $(2x-1)(x+4)$
$\to 2x \times x = 2x^2$
$\to 2x \times 4 = 8x$
$\to (-1) \times x = -x$
$\to (-1) \times 4 = -4$
Résultat : $2x^2 + 8x - x - 4 = 2x^2 + 7x - 4$

Exemple 3 : $(3x-2)(2x-5)$
$\to 3x \times 2x = 6x^2$
$\to 3x \times (-5) = -15x$
$\to (-2) \times 2x = -4x$
$\to (-2) \times (-5) = +10$
Résultat : $6x^2 - 15x - 4x + 10 = 6x^2 - 19x + 10$

Attention aux signes !
Quand on multiplie deux nombres négatifs, le résultat est positif.
$(-2) \times (-5) = +10$

4. Carré d'une somme $(a+b)^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Démonstration

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemple 1 : $(x+4)^2$
$a = x$, $b = 4$
$= x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2$
$= x^2 + 8x + 16$

Exemple 2 : $(3x+2)^2$
$a = 3x$, $b = 2$
$= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2$
$= 9x^2 + 12x + 4$

Astuce : Le double produit est toujours POSITIF dans $(a+b)^2$.
Premier terme au carré + double produit + second terme au carré.

5. Carré d'une différence $(a-b)^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Démonstration

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a \times a + a \times (-b) + (-b) \times a + (-b) \times (-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemple 1 : $(x-5)^2$
$a = x$, $b = 5$
$= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2$
$= x^2 - 10x + 25$

Exemple 2 : $(2x-3)^2$
$a = 2x$, $b = 3$
$= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2$
$= 4x^2 - 12x + 9$

Attention :
Le double produit est NÉGATIF dans $(a-b)^2$.
Ne pas oublier que b^2 est toujours positif.

6. Différence de carrés $a^2 - b^2$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Démonstration

$(a-b)(a+b) = a \times a + a \times b - b \times a - b \times b = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$

Exemple 1 : $x^2 - 16$
$a = x$, $b = 4$ car $4^2 = 16$
$= (x-4)(x+4)$

Exemple 2 : $9x^2 - 25$
$a = 3x$, $b = 5$ car $(3x)^2 = 9x^2$
$= (3x-5)(3x+5)$

Exemple 3 : $(x+2)^2 - 9$
$a = (x+2)$, $b = 3$
$= [(x+2)-3][(x+2)+3]$
$= (x-1)(x+5)$

Astuce : La différence de carrés est la SEULE identité qui se factorise avec DEUX parenthèses.
Reconnaître : "carré - carré" $\rightarrow$ toujours $(a-b)(a+b)$

7. Factorisation par facteur commun

$$ka + kb = k(a+b)$$
$$ka - kb = k(a-b)$$

Exemple 1 : $5x + 20$
Facteur commun : 5
$5x + 20 = 5 \times x + 5 \times 4$
$= 5(x+4)$

Exemple 2 : $3x^2 - 6x$
Facteur commun : $3x$
$3x^2 - 6x = 3x \times x - 3x \times 2$
$= 3x(x-2)$

Facteur commun "caché"

Exemple 3 : $(x+3)(2x-1) + (x+3)(5x+4)$
Facteur commun : $(x+3)$
$= (x+3)[(2x-1)+(5x+4)]$
$= (x+3)(2x-1+5x+4)$
$= (x+3)(7x+3)$

Exemple 4 : $(2x-1)^2 - (2x-1)(x+3)$
Facteur commun : $(2x-1)$
$= (2x-1)[(2x-1)-(x+3)]$
$= (2x-1)(2x-1-x-3)$
$= (2x-1)(x-4)$

Attention :
Quand on factorise, on doit retrouver l'expression d'origine en développant.
Toujours vérifier : $k(a+b) = ka + kb$

Exercices corrigés

Exercice 1 : Réduction et développement simple
$A = 5x - 2 + 3x - 7 - 4x^2 + 2x^2$
$B = 3(2x - 4) - 2(x + 5)$

Corrigé :
A :
$x^2 : -4x^2 + 2x^2 = -2x^2$
$x : 5x + 3x = 8x$
constantes : $-2 - 7 = -9$
$A = -2x^2 + 8x - 9$
B :
$3(2x - 4) = 6x - 12$
$-2(x + 5) = -2x - 10$
$B = 6x - 12 - 2x - 10 = 4x - 22$

Exercice 2 : Double distributivité
$C = (2x + 3)(x - 4)$
$D = (x - 5)(3x - 2)$

Corrigé :
C :
$2x \times x = 2x^2$
$2x \times (-4) = -8x$
$3 \times x = 3x$
$3 \times (-4) = -12$
$C = 2x^2 - 8x + 3x - 12 = 2x^2 - 5x - 12$
D :
$x \times 3x = 3x^2$
$x \times (-2) = -2x$
$(-5) \times 3x = -15x$
$(-5) \times (-2) = +10$
$D = 3x^2 - 2x - 15x + 10 = 3x^2 - 17x + 10$

Exercice 3 : Identités remarquables
$E = (3x+2)^2$
$F = (4x-1)^2$
$G = (2x+5)(2x-5)$

Corrigé :
E : $(3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$
F : $(4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = 16x^2 - 8x + 1$
G : $(2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

Exercice 4 : Factorisation
$H = 7x + 21$
$I = 5x^2 - 15x$
$J = 9x^2 - 16$
$K = (x+2)(3x-1) + (x+2)(5x+4)$

Corrigé :
H : $7(x+3)$
I : $5x(x-3)$
J : $(3x-4)(3x+4)$
K : $(x+2)[(3x-1)+(5x+4)] = (x+2)(8x+3)$

Exercice 5 : Expression complexe
$L = (2x-1)^2 - (x+3)(2x-1)$

Corrigé :
Facteur commun : $(2x-1)$
$L = (2x-1)[(2x-1)-(x+3)]$
$= (2x-1)(2x-1-x-3)$
$= (2x-1)(x-4)$