Ensembles de nombres, intervalles et valeur absolue

Un cours pas à pas pour tout comprendre, avec des explications simples, des exemples concrets et des exercices corrigés.

Sommaire

I. Les ensembles de nombres

En maths, on regroupe les nombres dans des "familles" appelées **ensembles**. Chaque ensemble a son propre symbole.

Ensemble $\mathbb{N}$ (entiers naturels)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Ce sont les nombres qui servent à **compter** : 0, 1, 2, 3, 4, ... (pas de virgule, pas de signe -)

Exemples :

— $5 \in \mathbb{N}$ (5 est dans $\mathbb{N}$)

— $0 \in \mathbb{N}$ (0 est dans $\mathbb{N}$)

— $-3 \notin \mathbb{N}$ (-3 n'est pas dans $\mathbb{N}$ car négatif)

— $2,5 \notin \mathbb{N}$ (2,5 n'est pas entier)

Ensemble $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Ce sont les nombres entiers **positifs et négatifs**.

Exemples :

— $-5 \in \mathbb{Z}$

— $12 \in \mathbb{Z}$

— $-1,5 \notin \mathbb{Z}$ (pas entier)

À savoir : Tous les nombres de $\mathbb{N}$ sont aussi dans $\mathbb{Z}$. On écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$).

Ensemble $\mathbb{D}$ (nombres décimaux)

Un nombre décimal a un nombre **fini** de chiffres après la virgule.

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Exemples :

— $-3,14 \in \mathbb{D}$ (2 chiffres après la virgule)

— $5 \in \mathbb{D}$ (on peut écrire 5,0)

— $7/4 = 1,75 \in \mathbb{D}$

— $1/3 \approx 0,333... \notin \mathbb{D}$ (une infinité de 3)

Ensemble $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels)

Un nombre rationnel peut s'écrire sous forme de **fraction** $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers ($b \neq 0$).

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Exemples :

— $2/3 \in \mathbb{Q}$

— $-5 \in \mathbb{Q}$ (car $-5 = -5/1$)

— $0,333... = 1/3 \in \mathbb{Q}$

— $\pi \approx 3,14159... \notin \mathbb{Q}$ (pas une fraction)

Ensemble $\mathbb{R}$ (nombres réels)

C'est **tous les nombres** que tu connais : les entiers, les décimaux, les fractions, les racines carrées, π, etc.

Exemples :

— $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (c'est un réel, mais pas rationnel)

— $\pi \in \mathbb{R}$

— $-8,3 \in \mathbb{R}$

Résumé : l'inclusion des ensembles

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Ca signifie :

— Tous les naturels sont dans les relatifs

— Tous les relatifs sont dans les décimaux

— Tous les décimaux sont dans les rationnels

— Tous les rationnels sont dans les réels

Exercice 1 : Dans quelle famille ?

Dis à quel(s) ensemble(s) appartiennent ces nombres :

— a) -8

— b) $\frac{2}{5}$

— c) $\sqrt{16}$

— d) π

Corrigé :

— a) $-8 \in \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (mais pas $\mathbb{N}$ car négatif)

— b) $\frac{2}{5} = 0,4 \in \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

— c) $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

— d) $\pi \in \mathbb{R}$ seulement (irrationnel)

II. Les intervalles

Un intervalle, c'est un **morceau de la droite des nombres**. Ça permet de dire "tous les nombres entre telle et telle valeur".

Intervalles bornés (avec un début et une fin)

$[a; b]$
Fermé aux deux bouts
$a \leq x \leq b$

[=====]

$[a; b[$
Fermé à gauche, ouvert à droite
$a \leq x < b$

[=====[

$]a; b[$
Ouvert aux deux bouts
$a < x < b$

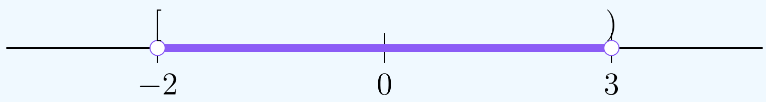
]=====[

$]a; b]$
Ouvert à gauche, fermé à droite
$a < x \leq b$

]=====]

Exemple concret : $[-2;3[$

Cet intervalle contient tous les nombres de -2 (inclus) jusqu'à 3 (exclu).



Appartiennent :

- -2, -1, 0, 1, 2, 2.9

N'appartiennent pas :

- -3, 3, 4

Intervalles non bornés (avec l'infini)

$[a;+\infty[$
$x \geq a$

$]-\infty;a]$
$x \leq a$

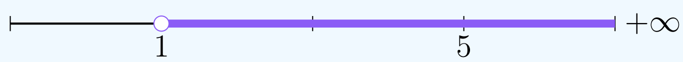
$]a;+\infty[$
$x > a$

$]-\infty;a[$
$x < a$

Attention : Le crochet est **toujours ouvert** du côté de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) car l'infini n'est pas un nombre qu'on peut atteindre.

Exemple : $[1;+\infty[$

Tous les nombres à partir de 1 (inclus) vers l'infini.



1, 5, 100, 1000 sont dans l'intervalle
0, -5 ne sont pas dans l'intervalle

Exercice 2 : Traduire en inégalités

- a) $x \in [-3;2]$
- b) $x \in]-\infty;4[$
- c) $x \in [0;5[$
- d) $x \in]-2;+\infty[$

Corrigé :

— a) $-3 \leq x \leq 2$

— b) $x < 4$

— c) $0 \leq x < 5$

— d) $x > -2$

III. Union et intersection

Intersection $I \cap J$

C'est les nombres qui sont **à la fois** dans I ET dans J.

($\cap$ ressemble à un "et" qui attrape le milieu)

Union $I \cup J$

C'est les nombres qui sont dans I **ou** dans J (ou les deux).

($\cup$ ressemble à un "ou" qui rassemble)

Méthode avec un dessin

1. Dessine chaque intervalle sur une droite.
2. Pour l'intersection : prends la partie où les deux couleurs se superposent.
3. Pour l'union : prends tout ce qui est colorié.

Exemple : $I = [-3; 1[$ et $J = [0; 3]$

Intersection $I \cap J$

La zone commune va de 0 à 1 (en excluant 1)

$$[0; 1[$$

Union $I \cup J$

On prend tout de -3 à 3

$$[-3; 3]$$

Exercice 3 : Union et intersection

Soit $I = [-4; 2]$ et $J =]-1; 5]$

— a) Trouve $I \cap J$

— b) Trouve $I \cup J$

Corrigé :

a) L'intersection est la partie commune : de -1 à 2 (en incluant 2).

$$I \cap J =]-1;2]$$

b) L'union va de -4 à 5 :

$$I \cup J = [-4;5]$$

IV. Valeur absolue

C'est quoi la valeur absolue ?

La valeur absolue d'un nombre, c'est **sa distance à 0**. Donc c'est toujours positif.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

En français :

— Si le nombre est positif ou nul, on le laisse tranquille.

— Si le nombre est négatif, on prend son opposé (on enlève le moins).

Exemples simples :

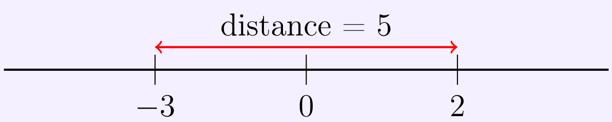
— $|5| = 5$ — $|-3| = 3$ — $|0| = 0$ — $|-2,5| = 2,5$

Attention avec les lettres !

On ne peut pas dire que $|-x| = x$ car c'est faux si x est négatif.
Exemple : si $x = -2$, alors $|-(-2)| = |2| = 2$ mais $x = -2 \rightarrow 2 \neq -2$!

La valeur absolue = distance

La distance entre deux nombres x et y est $|y - x|$ (ou $|x - y|$).



Distance entre -3 et 2 : $|-3-2| = |-5| = 5$

Distance de -3 à 0 : $|-3| = 3$

Calculer avec des valeurs absolues

Exemple 1 : $|\sqrt{2}-1|$
$\sqrt{2} \approx 1,414$ donc $\sqrt{2}-1 > 0$
Donc $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

Exemple 2 : $|3-\pi|$
$\pi \approx 3,14$ donc $3-\pi < 0$
Donc $|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3$

Exemple 3 : Résoudre $|x-2| = 5$
Ça veut dire : la distance entre x et 2 est 5.
Donc $x = 2+5 = 7$ ou $x = 2-5 = -3$

Exercice 4 : Valeur absolue

Calcule :

— a) $|-8|$
— b) $|5-7|$
— c) $|\sqrt{3}-2|$ ($\sqrt{3} \approx 1,732$)
— d) Résous $|x+1| = 4$

Corrigé :

— a) $|-8| = 8$
— b) $|5-7| = |-2| = 2$
— c) $1,732 - 2 = -0,268 \rightarrow |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$
— d) $|x+1| = 4 \rightarrow x+1 = -4$ ou $x+1 = 4 \rightarrow x = -5$ ou $x = 3$

Exercice 5 : Valeur absolue et intervalles

Traduis avec des intervalles :

— a) $|x| \leq 3$
— b) $|x| > 2$
— c) $|x-1| \leq 2$

Corrigé :

— a) $|x| \leq 3 \rightarrow$ distance à 0 3 $\rightarrow -3 \leq x \leq 3 \rightarrow [-3; 3]$

— b) $|x| > 2 \rightarrow$ distance à 0 $> 2 \rightarrow x < -2$ ou $x > 2 \rightarrow]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

— c) $|x-1| \leq 2 \rightarrow$ distance à 1 2 $\rightarrow 1-2 \leq x \leq 1+2 \rightarrow [-1; 3]$

Exercices de synthèse

Exercice 6 : Mélange

1. À quel ensemble appartient $\sqrt{25}$?
2. Écris l'intervalle des nombres x tels que $-2 \leq x < 5$
3. Calcule $|-12|$
4. Résous $|x-3| = 2$

Corrigé :

1. $\sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
2. $[-2; 5[$
3. $|-12| = 12$
4. $|x-3| = 2 \rightarrow x = 1$ ou $x = 5$

Ce qu'il faut retenir

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Intervalle = portion de droite

$|x|$ = distance à zéro

Tout va bien, respire, ce n'est que des maths !