Équations et inéquations

Équations 1er degré • Équations produit nul • Inéquations • Tableaux de signes

Cours ultra-détaillé avec toutes les techniques, exemples pas à pas et exercices corrigés.

Vocabulaire des équations

Inconnue
Lettre qui représente un nombre inconnu (souvent x)

Équation
Égalité avec une inconnue
$3x - 2 = 5x + 4$

Solution
Valeur qui rend l'égalité vraie

Tester une égalité

Exemple : Vérifier si $x = 5$ est solution de $3x - 2 = 2x + 3$

Membre de gauche : $3 \times 5 - 2 = 15 - 2 = 13$
Membre de droite : $2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$
Égalité vérifiée $\rightarrow$ 5 est solution

Contre-exemple : Vérifier si $x = 2$ est solution de $4x + 1 = 3x - 5$

Gauche : $4 \times 2 + 1 = 8 + 1 = 9$
Droite : $3 \times 2 - 5 = 6 - 5 = 1$
$9 \neq 1 \rightarrow 2$ n'est pas solution

Exercice : Tester si $x = -2$ est solution de $5x + 3 = 2x - 3$

Gauche : $5 \times (-2) + 3 = -10 + 3 = -7$
Droite : $2 \times (-2) - 3 = -4 - 3 = -7$
-2 est solution

Équations du premier degré

Objectif : isoler x pour obtenir $x =$ nombre

Règles de base

Règle 1
On peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres.

Règle 2
On peut multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre non nul.

Méthode pas à pas

Exemple 1 : $3x - 4 = 2x + 1$

Étape 1 : On regroupe les x à gauche, les constantes à droite
$3x - 2x = 1 + 4$
Étape 2 : On réduit
$x = 5$
Solution : $x = 5$

Exemple 2 : $5x + 3 = 2x - 6$

$5x - 2x = -6 - 3$
$3x = -9$
$x = \frac{-9}{3} = -3$

Exemple 3 : avec parenthèses $4(x - 2) = 3x + 1$

Étape 1 : On développe
$4x - 8 = 3x + 1$
$4x - 3x = 1 + 8$
$x = 9$

Exemple 4 : plus complexe $2(x + 3) - 5 = 4x - (x - 2)$

Étape 1 : Développer
$2x + 6 - 5 = 4x - x + 2$
$2x + 1 = 3x + 2$
$2x - 3x = 2 - 1$
$-x = 1$
$x = -1$

Attention :
Quand on change un terme de côté, on change son signe !
$3x - 4 = 2x + 1 \to 3x - 2x = 1 + 4$

Exercice : Résoudre $7x - 5 = 3x + 7$

$7x - 3x = 7 + 5$
$4x = 12$
$x = \frac{12}{4} = 3$

Équations produit nul

Si $A \times B = 0$ **alors** $A = 0$ **ou** $B = 0$

Exemple 1 : $(4x + 6)(3 - 7x) = 0$

Soit $4x + 6 = 0$ ou $3 - 7x = 0$
$4x = -6$ ou $-7x = -3$
$x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{3}{7}$
Deux solutions : $-\frac{3}{2}$ **et** $\frac{3}{7}$

Exemple 2 : $5x^2 - 4x = 0$

On factorise par x : $x(5x - 4) = 0$
Soit $x = 0$ ou $5x - 4 = 0$
$x = 0$ ou $x = \frac{4}{5}$

Exemple 3 : avec factorisation préalable
$(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$

Facteur commun $(3x + 1)$:
$(3x + 1)[(1 - 6x) - (3x + 7)] = 0$
$(3x + 1)(1 - 6x - 3x - 7) = 0$
$(3x + 1)(-9x - 6) = 0$
Soit $3x + 1 = 0$ ou $-9x - 6 = 0$
$x = -\frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{2}{3}$

Exercice : Résoudre $(2x-3)(x+4)=0$

$2x-3=0$ ou $x+4=0$
$2x=3$ ou $x=-4$
$x=\dfrac{3}{2}$ ou $x=-4$

Exercice : Résoudre $x^2=3x$

$x^2-3x=0$
$x(x-3)=0$
$x=0$ ou $x=3$

Équations du type $x^2=a$

$a<0$	$a=0$	$a>0$
Pas de solution $x^2=-4 \to$ impossible	Une solution : $x=0$	Deux solutions : $x=-\sqrt{a}$ et $x=\sqrt{a}$

Exemple 1 : $x^2=16$
$x=-\sqrt{16}=-4$ ou $x=\sqrt{16}=4$

Exemple 2 : $(x+2)^2=9$
$x+2=-3$ ou $x+2=3$
$x=-5$ ou $x=1$

Exemple 3 : $3x^2=27$
$x^2=9$
$x=-3$ ou $x=3$

Attention : Ne pas oublier la solution négative !
Beaucoup d'élèves écrivent seulement $x=\sqrt{a}$

Exercice : Résoudre $4x^2 - 9 = 0$

$4x^2 = 9$
$x^2 = \frac{9}{4}$
$x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$

Équations quotient

$$\frac{A}{B} = 0 \text{ avec } B \neq 0 \text{ équivaut à } A = 0$$

IMPORTANT : Il faut toujours exclure les valeurs qui annulent le dénominateur !

Exemple 1 : $\frac{3x+5}{x-1} = 0$
Condition : $x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$
$3x + 5 = 0$
$3x = -5$
$x = -\frac{5}{3}$ (valide car $-\frac{5}{3} \neq 1$)

Exemple 2 : $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$
Condition : $x + 2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$
$x^2 - 4 = 0$
$x = -2$ ou $x = 2$
Mais $x = -2$ est interdit, donc seule solution : $x = 2$

Exercice : Résoudre $\frac{2x-1}{x+3} = 0$

Condition : $x \neq -3$
$2x - 1 = 0$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$ (valide)

Exercice : Résoudre $\dfrac{x^2-9}{x-3} = 0$

Condition : $x \neq 3$
$x^2 - 9 = 0$
$x = -3$ ou $x = 3$
$x = 3$ est interdit, donc seule solution : $x = -3$

Inéquations du premier degré

Règle 1 (addition/soustraction)
On peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres sans changer le sens.

Règle 2 (multiplication/division)
Si on multiplie ou divise par un nombre **négatif**, on change le sens de l'inégalité !

Exemple 1 : $2x + 3 < 4 - 5x$

$2x + 5x < 4 - 3$
$7x < 1$
$x < \dfrac{1}{7}$
Solution : $]-\infty; \dfrac{1}{7}[$

Exemple 2 : avec division par un négatif
$2(x-4) \leq 4x - 5$

$2x - 8 \leq 4x - 5$
$2x - 4x \leq -5 + 8$
$-2x \leq 3$
On divise par -2 (négatif) $\rightarrow$ on change le sens :
$x \geq -\dfrac{3}{2}$
Solution : $[-\dfrac{3}{2}; +\infty[$

Exemple 3 : $5 - 3x \geq 2x + 10$

$-3x - 2x \geq 10 - 5$
$-5x \geq 5$
On divise par -5 (négatif) $\rightarrow$ changement de sens :
$x \leq -1$
Solution : $]-\infty; -1]$

Exercice : Résoudre $7x - 5 > 2x + 10$

$7x - 2x > 10 + 5$
$5x > 15$
$x > 3$
Solution : $]3; +\infty[$

Tableaux de signes

8.1 Signe de $ax + b$

Cas $a > 0$: $2x + 6$
Racine : $2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$2x + 6$		$-$	0	$+$	

On commence par $-$ et on termine par $+$

Cas $a < 0$: $-3x + 12$
Racine : $-3x + 12 = 0 \rightarrow x = 4$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-3x+12$		$+$	0	$-$	

On commence par $+$ et on termine par $-$

8.2 Tableau de signes d'un produit

Exemple : $(3x - 9)(1 - 2x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$3x - 9$		$-$	$-$	0	$+$		
$1 - 2x$		$+$	0	$-$	$-$		
Produit		$-$	0	$+$	$-$		

On en déduit que $(3x - 9)(1 - 2x) > 0$ pour $x \in]\frac{1}{2}; 3[$

8.3 Tableau de signes d'un quotient

Exemple : $\dfrac{2 - 6x}{3x - 2} \leq 0$

Valeurs interdites : $x = \dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-6x$		$+$	0	$-$	$-$		
$3x-2$		$-$	$-$	d	$+$		
Quotient		$-$	0	d	$-$		

Solution : $]-\infty;\frac{1}{3}]\cup]\frac{2}{3};+\infty[$

Exercice : Résoudre $(2x-4)(3-x)>0$

Racines : $2x-4=0 \to x=2$; $3-x=0 \to x=3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$2x-4$		$-$	0	$+$	$+$		
$3-x$		$+$	$+$	0	$-$		
Produit		$-$	0	0	$-$		

Solution : $]2;3[$

Exercices corrigés complets

Exercice 1 : Équations 1er degré

a) $5x-3=2x+6$

b) $4(2x-1)=3x+5$

c) $\dfrac{2x}{3}+5=7$

Corrigé :

a) $5x-2x=6+3 \to 3x=9 \to x=3$

b) $8x-4=3x+5 \to 8x-3x=5+4 \to 5x=9 \to x=\dfrac{9}{5}$

c) $\dfrac{2x}{3}=2 \to 2x=6 \to x=3$

Exercice 2 : Équations produit nul
a) $(3x-6)(2x+5)=0$
b) $x^2-7x=0$
c) $4x^2-9=0$

Corrigé :
a) $3x-6=0$ ou $2x+5=0 \to x=2$ ou $x=-\dfrac{5}{2}$
b) $x(x-7)=0 \to x=0$ ou $x=7$
c) $x^2=\dfrac{9}{4} \to x=-\dfrac{3}{2}$ ou $x=\dfrac{3}{2}$

Exercice 3 : Équations avec quotient
a) $\dfrac{2x-1}{x+4}=0$
b) $\dfrac{x^2-16}{x-4}=0$

Corrigé :
a) Condition $x\neq -4$, $2x-1=0 \to x=\dfrac{1}{2}$
b) Condition $x\neq 4$, $x^2-16=0 \to x=-4$ ou $x=4 \to$ seule $x=-4$ est valide

Exercice 4 : Inéquations
a) $3x-7>2x+1$
b) $5-2x\leq 3x+10$

Corrigé :
a) $3x-2x>1+7 \to x>8 \to]8;+\infty[$
b) $-2x-3x\leq 10-5 \to -5x\leq 5 \to x\geq -1 \to [-1;+\infty[$

Exercice 5 : Tableau de signes
Résoudre $(-2x+4)(x+3) \geq 0$

Corrigé :
Racines : $-2x+4=0 \rightarrow x=2$; $x+3=0 \rightarrow x=-3$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-2x+4$		$+$	$+$	0	$-$		
$x+3$		$-$	0	$+$	$+$		
Produit		$-$	0	0	$-$		

Solution : $[-3; 2]$