Fonctions affines et tableaux de signes

Cours complet : définition, représentation graphique, coefficient directeur, ordonnée à l'origine, signe de $ax + b$, tableaux de signes pour produits et quotients.

Qu'est-ce qu'une fonction affine ?

Définition
Une fonction **affine** est une fonction qui peut s'écrire sous la forme :

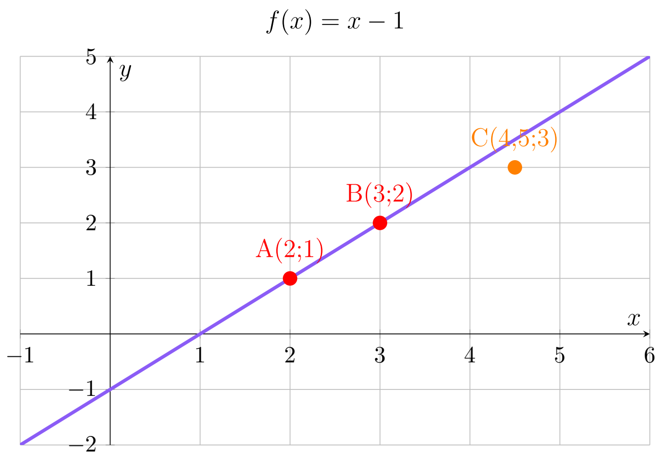
$$f(x) = ax + b$$

où a et b sont deux nombres réels fixés.
- a s'appelle le **coefficient directeur** (ou pente)
- b s'appelle l'**ordonnée à l'origine**

Exemples concrets
- $f(x) = 2x - 1 \quad (a = 2,\ b = -1)$
- $g(x) = -3x + 4 \quad (a = -3,\ b = 4)$
- $h(x) = 5x \quad (a = 5,\ b = 0$, fonction linéaire$)$
- $k(x) = 2 \quad (a = 0,\ b = 2$, fonction constante$)$

Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.
Un point $M(x; y)$ appartient à cette droite si et seulement si $y = ax + b$.



Lecture sur le graphique

Pour la droite tracée ($f(x) = x - 1$) :

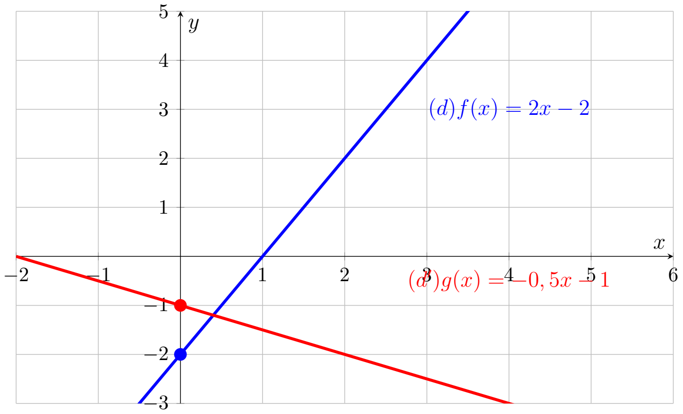
- Le point A(2 ; 1) appartient à la droite car $f(2) = 2 - 1 = 1$
- Le point B(3 ; 2) appartient à la droite car $f(3) = 3 - 1 = 2$
- Le point C(4,5 ; 3) n'appartient pas car $f(4,5) = 4,5 - 1 = 3,5 \neq 3$

Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Définitions

Pour une fonction affine $f(x) = ax + b$:

- a est le coefficient directeur. Il indique la pente de la droite : quand on avance de 1 en x, on monte (ou descend) de a en y.
- b est l'ordonnée à l'origine. C'est la valeur de $f(0)$, donc le point où la droite coupe l'axe des ordonnées.



- **Droite (d) :** $f(x) = 2x - 2$
  - Ordonnée à l'origine : $b = -2$ (la droite coupe l'axe en -2)
  - Coefficient directeur : $a = 2$ (quand on avance de 1, on monte de 2)
  - $a > 0 \to$ fonction croissante
- **Droite (d') :** $g(x) = -0,5x - 1$
  - Ordonnée à l'origine : $b = -1$
  - Coefficient directeur : $a = -0,5$ (quand on avance de 1, on descend de 0,5)
  - $a < 0 \to$ fonction décroissante

Exemple : déterminer l'expression depuis deux points

Soit une fonction affine f telle que $f(2) = 4$ et $f(5) = 1$.

Étape 1 : Calcul du coefficient directeur a

$$a = \frac{f(2) - f(5)}{2 - 5} = \frac{4 - 1}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

Étape 2 : On a donc $f(x) = -x + b$

On utilise $f(2) = 4$: $4 = -2 + b \to b = 6$

Donc $f(x) = -x + 6$

Signe de l'expression $ax + b$

Règle fondamentale
Pour étudier le signe de $ax + b$, on commence par trouver la valeur qui annule cette expression.

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$$

Ensuite, le signe dépend du coefficient a :

Si $a > 0$	**Si** $a < 0$
x : $-\infty$ … $-\frac{b}{a}$ … $+\infty$; $ax+b$: $-$ 0 $+$	x : $-\infty$ … $-\frac{b}{a}$ … $+\infty$; $ax+b$: $+$ 0 $-$
La fonction est croissante : négative avant la racine positive après la racine	La fonction est décroissante : positive avant la racine négative après la racine

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Méthode pas à pas

1. Résoudre $ax + b = 0$ pour trouver la valeur qui annule (la "racine").
2. Placer cette valeur sur la ligne du tableau.
3. Mettre 0 sur la ligne de l'expression à cet endroit.
4. Placer les signes : si $a > 0$: $-$ 0 $+$; si $a < 0$: $+$ 0 $-$

Exemple 1 : $f(x) = 2x - 4$
Racine : $2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = 2$
$a = 2 > 0 \rightarrow$ signe : $-$ 0 $+$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$	0	$+$	

Exemple 2 : $g(x) = 3 - x$
Racine : $3 - x = 0 \iff x = 3$
On réécrit : $g(x) = -x + 3 \rightarrow a = -1 < 0 \rightarrow$ signe : $+$ 0 $-$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	

Astuce :
Tu n'as pas besoin d'apprendre par cœur la formule $-\frac{b}{a}$. Résous simplement l'équation chaque fois, c'est plus sûr !

Exercice 1 : Tableaux de signes
Dresser le tableau de signes de :
a) $5x - 10$
b) $-2x + 8$

Corrigé :

a) $5x - 10$: racine $x = 2$, $a = 5 > 0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$5x - 10$		$-$	0	$+$	

b) $-2x + 8$: racine $x = 4$, $a = -2 < 0$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-2x + 8$		$+$	0	$-$	

✖ Signe d'un produit $(ax + b)(cx + d)$

Important :
On ne développe surtout pas! On garde la forme factorisée pour étudier le signe.

Méthode

1. Trouver les valeurs qui annulent chaque facteur (en résolvant $ax+b = 0$ et $cx+d = 0$).
2. Classer ces valeurs dans l'ordre croissant sur la ligne du haut.
3. Faire une ligne pour chaque facteur avec leur signe (comme en partie 3).
4. Ajouter une ligne "Produit" et appliquer la règle des signes :

$$+ \times + = + \quad | \quad + \times - = - \quad | \quad - \times + = - \quad | \quad - \times - = +$$

Quand un facteur est nul, le produit est nul (0 sur la ligne produit).

Exemple : $f(x) = (3 + x)(-2x + 6)$
1. Racines :
$3 + x = 0 \iff x = -3$
$-2x + 6 = 0 \iff -2x = -6 \iff x = 3$
2. Tableau :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x + 3$		$-$	0	$+$	$+$		
$-2x + 6$		$+$	$+$	0	$-$		
Produit		$-$	0	0	$-$		

Le produit est négatif sur $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$ et nul en -3 et 3.

Exemple avec factorisation : $x^3 - x$
On commence par factoriser :
$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$
Racines : $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	$-$	0	$+$	$+$			
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$			
$x-1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$			
Produit		$-$	0	0	0	$+$			

Exercice 2 : Produit
Dresser le tableau de signes de $h(x) = (2x-4)(3-x)$

Corrigé :

Racines : $2x - 4 = 0 \iff x = 2\,;\, 3 - x = 0 \iff x = 3$
Ordre : 2 puis 3

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$2x-4$		$-$	0	$+$	$+$		
$3-x$		$+$	$+$	0	$-$		
Produit		$-$	0	0	$-$		

$h(x) \geq 0$ sur $[2;3]$

÷ Signe d'un quotient

Règle supplémentaire :
Pour un quotient, le dénominateur ne doit jamais être nul !
On doit donc exclure les valeurs qui annulent le dénominateur.

Méthode

1. Trouver les valeurs interdites (dénominateur $= 0$).
2. Trouver les valeurs qui annulent le numérateur.
3. Classer toutes ces valeurs dans l'ordre.
4. Faire le tableau de signes normalement, mais sur la dernière ligne, on met une **double barre** pour les valeurs interdites.

Exemple : $\dfrac{1-x}{3x+12}$

1. Ensemble de définition :
$3x+12 \neq 0 \iff x \neq -4$

2. Racines :
$1-x=0 \iff x=1$
$3x+12=0 \iff x=-4$ (valeur interdite)

3. Tableau :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	$+$	0	$-$		
$3x+12$		$-$	0	$+$	$+$		
Quotient		$-$	‖	0	$-$		

Le quotient est négatif sur $]-\infty;-4[\cup]1;+\infty[$, nul en 1, non défini en -4.

Exercice 3 : Quotient

Dresser le tableau de signes de $\dfrac{x-2}{x+3}$

Corrigé :

Valeur interdite : $x+3=0 \iff x=-3$
Racine numérateur : $x-2=0 \iff x=2$

x	$-\infty$		-3		2	$+\infty$
$x-2$		$-$	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	$+$	
Quotient		$+$	‖	0	$+$	

Le quotient est positif sur $]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$, nul en 2.

Exercices de synthèse

Exercice 4 : Fonction affine et tableau de signes
Soit la fonction f définie par $f(x) = -3x + 6$.

a) Quel est son coefficient directeur ? Son ordonnée à l'origine ?
b) Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

Corrigé :

a) $a = -3$, $b = 6$
b) Racine : $-3x + 6 = 0 \iff -3x = -6 \iff x = 2$
$a = -3 < 0 \rightarrow$ signe $+ \ 0 \ -$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-3x+6$		$+$	0	$-$	

Exercice 5 : Inéquation produit
Résoudre l'inéquation $(x + 1)(2x - 6) \geq 0$

Corrigé :

Racines : $x + 1 = 0 \iff x = -1$; $2x - 6 = 0 \iff x = 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$		
$2x-6$		$-$	$-$	0	$+$		
Produit		$+$	0	0	$+$		

$(x + 1)(2x - 6) \geq 0$ sur $]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$

Exercice 6 : Inéquation quotient

Résoudre $\dfrac{x-4}{x+2} < 0$

Corrigé :

Valeur interdite : $x \neq -2$
Racine numérateur : $x - 4 = 0 \iff x = 4$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	$-$		0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Quotient		$+$	$\|$		0	$+$	

$\dfrac{x-4}{x+2} < 0$ sur $]-\infty;-2[$ (strictement négatif)

Ce qu'il faut retenir

Fonction affine	**Signe de $ax + b$**	**Produit/Quotient**
$f(x) = ax + b$ Représentation : droite	$a > 0$: $-$ 0 $+$ $a < 0$: $+$ 0 $-$	Tableau de signes Attention aux valeurs interdites