

Probabilités

Cours complet : expérience aléatoire, univers, événements, probabilités, arbres, union et intersection.

Avec méthodes, exemples concrets et exercices corrigés.

I. Expérience aléatoire

II. Probabilité

III. Événements

IV. Expérience à 2 épreuves

V. Union et intersection

Exercices

Expérience aléatoire

Définition

Une **expérience aléatoire** est une expérience qui a plusieurs résultats possibles (appelés **issues**) et dont on ne peut pas prévoir avec certitude quel résultat va se produire.

Exemples d'expériences aléatoires :

- Lancer une pièce de monnaie et regarder la face supérieure.
- Lancer un dé à 6 faces et regarder le nombre de points.
- Faire tourner une roue avec des secteurs de couleurs et regarder la couleur indiquée.

Vocabulaire

L'ensemble de toutes les issues possibles s'appelle l'**univers**. On le note souvent Ω .

Exemple : pour un dé à 6 faces, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Loi des grands nombres

Quand on répète une expérience un très grand nombre de fois, les fréquences d'apparition de chaque issue se rapprochent d'une valeur théorique appelée **probabilité**.

Exemple : en lançant un dé 2700 fois, les fréquences obtenues sont proches de $1/6$ pour chaque face.

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	434	456	443	459	435	473	2700
Fréquences	16,1%	16,9%	16,4%	17%	16,1%	17,5%	100%

Probabilité d'un événement

Probabilité

La **probabilité** d'une issue est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure ses chances de se produire.

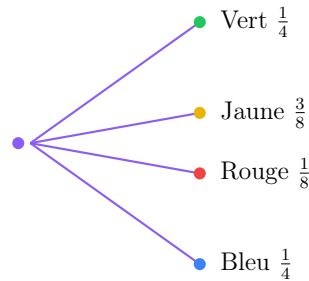
Quand toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Exemple : la roue colorée

Une roue est partagée en 8 secteurs : 2 bleus, 1 rouge, 3 jaunes, 2 verts.

La probabilité d'obtenir un secteur bleu est :

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$



Propriétés :

- La probabilité d'un événement E est comprise entre 0 et 1 : $0 \leq P(E) \leq 1$.
- La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent.

Exemple : tirage de carte

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit $E =$ "tirer un as".

Il y a 4 as dans le jeu, donc $P(E) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Événements

Définition

Un **événement** est un ensemble d'issues (une ou plusieurs).

Un **événement élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue.

Exemple avec le dé

Soit $A = \text{"obtenir un nombre pair"} = \{2, 4, 6\}$

Soit $B = \text{"obtenir un multiple de 3"} = \{3, 6\}$

L'événement "obtenir un 3" est un événement élémentaire.

Méthode : calculer une probabilité simple

Pour calculer $P(A)$, on compte le nombre d'issues favorables et on divise par le nombre total d'issues (en situation d'équiprobabilité).

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues total}}$$

Événement contraire

L'**événement contraire** de A , noté \bar{A} , est l'ensemble des issues qui ne sont pas dans A .

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Exemple : dé (suite)

$A = \text{"obtenir un nombre pair"} : P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Donc $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (obtenir un nombre impair).

Exercice 1 : Tirage de carte

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

- Quelle est la probabilité de tirer un cœur ?
- Quelle est la probabilité de tirer une figure (valet, dame, roi) ?

Corrigé :

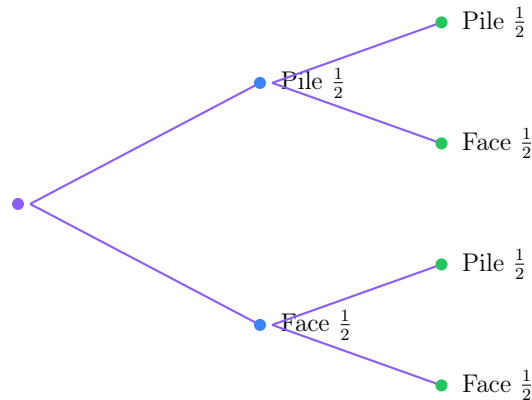
a) Il y a 8 cœurs dans le jeu, donc $P(\text{cœur}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

b) Il y a 3 figures par couleur \times 4 couleurs = 12 figures, donc $P(\text{figure}) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.

Expérience à deux épreuves

Principe

On utilise un **arbre pondéré** pour représenter les différentes possibilités.
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur ce chemin.



Méthode : calcul sur un arbre

- La probabilité d'un chemin = produit des probabilités.
- La probabilité d'un événement = somme des probabilités des chemins qui y mènent.

Exemple : deux lancers de pièce

On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. Soit $E =$ "obtenir au moins une fois Pile".

Chemins favorables : PP, PF, FP

$$P(PP) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(PF) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(FP) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Exercice 2 : Deux lancers de dé

On lance un dé à 6 faces deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir un double (deux fois le même nombre) ?

Corrigé :

Il y a $6 \times 6 = 36$ issues possibles (équiprobables).

Les doubles sont : (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) → 6 issues favorables.

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Union et intersection d'événements

Définitions

Intersection $A \cap B$: les issues qui sont à la fois dans A et dans B ("A et B").

Union $A \cup B$: les issues qui sont dans A ou dans B (ou les deux) ("A ou B").

Exemple : tirage de carte

Jeu de 32 cartes. Soit $A =$ "tirer un valet", $B =$ "tirer un cœur ou un carreau".

$A \cap B =$ "tirer le valet de cœur ou le valet de carreau".

$A \cup B =$ "tirer un valet (n'importe lequel) ou un cœur ou un carreau".

Formule fondamentale

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

On enlève $P(A \cap B)$ pour ne pas compter deux fois les issues communes.

Méthode : calcul avec la formule

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
2. Appliquer la formule.

Exemple : avec le dé

$A =$ "obtenir un nombre pair" = $\{2, 4, 6\}$

$B =$ "obtenir un multiple de 3" = $\{3, 6\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A \cap B = \{6\} \text{ donc } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Événements incompatibles

Deux événements sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$ (aucune issue commune).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemple : valet et roi

Dans un jeu de 32 cartes, $A =$ "tirer un valet", $B =$ "tirer un roi".
 A et B sont incompatibles, donc $P(A \cup B) = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Exercice 3 : Tirage de dé

On lance un dé à 6 faces. Soit $A =$ "obtenir un nombre ≤ 2 ", $B =$ "obtenir un nombre ≥ 5 ".

- a) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
- b) Calculer $P(A \cup B)$.

Corrigé :

a) $A = \{1, 2\} \rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
 $B = \{5, 6\} \rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
 $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$
 b) $P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$

Exercice 4 : Tirage de carte

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit $C =$ "tirer un cœur", $D =$ "tirer une dame".

Calculer $P(C \cup D)$.

Corrigé :

$P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
 $P(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
 $C \cap D =$ "dame de cœur" $\rightarrow 1$ carte $\rightarrow P(C \cap D) = \frac{1}{32}$
 $P(C \cup D) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$

Exercices de synthèse

Exercice 5 : Urne

Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire une boule au hasard.

- Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
- Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue ?
- Quelle est la probabilité de ne pas tirer une boule rouge ?

Corrigé :

Total de boules = 8.

$$a) P(\text{rouge}) = \frac{3}{8}$$

$$b) P(\text{bleue}) = \frac{5}{8}$$

$$c) P(\text{non rouge}) = P(\text{bleue}) = \frac{5}{8} \text{ (ou } 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}\text{)}.$$

Exercice 6 : Deux tirages avec remise

On tire deux fois de suite une carte d'un jeu de 32 cartes en remettant la carte après chaque tirage.

Quelle est la probabilité de tirer deux cœurs ?

Corrigé :

Il y a 8 cœurs dans le jeu.

$$P(\text{cœur au 1er tirage}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{cœur au 2e tirage}) = \frac{1}{4} \text{ aussi (avec remise).}$$

$$P(\text{deux cœurs}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Exercice 7 : Au moins un

On lance deux dés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Corrigé :

On peut passer par l'événement contraire : "aucun 6".

$$P(\text{pas de 6 sur un dé}) = \frac{5}{6}$$

$$P(\text{aucun 6 sur les deux}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$$\text{Donc } P(\text{au moins un 6}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

Ce qu'il faut retenir

Probabilité	Arbre pondéré	Union
$0 \leq P(E) \leq 1$	Produit des probas sur un chemin	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Équiprobabilité : $P = \frac{\text{favorables}}{\text{total}}$	Somme sur plusieurs chemins	Si incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

© 2024 SimosMaths • Cours complet sur les probabilités • inspiré des méthodes pédagogiques